An application of generalized inverse limits (Research Trends on Set-theoretic and Geometric Topology and their Prospect)

深石, 純生; 松橋, 英市

数理解析研究所講究録
第 1987 巻 2016 年 21-24

An application of generalized inverse limits

島根大学・総合理工学研究科　深石 純生 (Sumiki Fukaishi)
INTERDISCIPLINARY FACULTY OF SCIENCE AND ENGINEERING,
SHIMANE UNIVERSITY
島根大学・総合理工学研究科　松橋 英市 (Eiichi Matsuhashi)
INTERDISCIPLINARY FACULTY OF SCIENCE AND ENGINEERING,
SHIMANE UNIVERSITY

1 INTRODUCTION

コンパクト連結距離空間を *continuum* と呼ぶ. X が continuum のとき, 2^X で X の空でない閉集合全体を表し, 距離は Hausdorff metric が入っているものとする. Continuum X が *indecomposable continuum* であるとは, X に真に含まれる 2 つの subcontinuum の和集合で X が表せないときにいう. 1970 年に Bellamy は [2] で次の定理を示した.

定理 1.1. ([2]) 任意の continuum X に対して, X と同相な continuum X' と, X' を含む indecomposable continuum Z, かつ Z から X' への retraction r が存在する.

つまり, 任意の continuum はある indecomposable continuum の retract となっていることがわかる. 同様の定理は [6] で Smith により証明されている. Bellamy の結果の証明は幾何的に行われているが, Smith の結果の証明には inverse limit が用いられており, またその結果は Bellamy の定理を改良したものである. この原稿では, 定理 1.1 を改良した, 次の定理の証明の概略を紹介する. 証明には generalized inverse limit を用いる.

定理 1.2. ([Fukaishi and Matsuhashi,preprint]) 任意の continuum X に対して, X と同相な continuum X' と, X' を含む indecomposable continuum Z, かつ Z から X' への retraction r が存在して, r の任意の逆像が Cantor set と同相になる.

2 PREPARATION

この章では, generalized inverse limit の定義と性質について紹介する. Generalized inverse limit は 2006 年に Ingram と Mahavir が [3] で導入した概念であり, 一言で言えば, 集合値写像についての inverse limit である. 定理 1.2 の証明の概略を述べる前に, 一般的に知られている定義や定理を紹介する. 最初に通常の inverse limit の定義について触れておく.

定義 2.1. $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ を位相空間の列とし，任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して，$f_i : X_{i+1} \to X_i$ とする．このとき，$\Pi_{i=1}^{\infty} X_i$ の部分空間 $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ を
$\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty} = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \Pi_{i=1}^{\infty} X_i \mid$ 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して，$x_i = f_i(x_{i+1})\}$
と定める．$\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ を $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ の *inverse limit* という．

前述したようにこの原稿では generalized inverse limit を扱うので関連する定義や定理を以下に述べる．

定義 2.2. X, Y を continuum とし，$f : X \to 2^Y$ とする．このとき f が *upper semi-continuous function* であるとは，任意の $x \in X$ と $f(x)$ の任意の近傍 V に対して，x の近傍 U が存在して，任意の $u \in U$ に対して $f(u) \subset V$ を満たすときにいう．

定義 2.3. ([3]) 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して，X_i を continuum とし，$f_i : X_{i+1} \to 2^{X_i}$ を upper semi-continuous function とする．このとき X_i と f_i の列 $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ を *inverse sequence* といい，X_i を *coordinate space*，f_i を *bonding map* という．また，inverse sequence $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ に対して，$\Pi_{i=1}^{\infty} X_i$ の部分空間 $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ を
$\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty} = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \Pi_{i=1}^{\infty} X_i \mid$ 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して，$x_i \in f_i(x_{i+1})\}$
と定め，$\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ を $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ の *generalized inverse limit* という．

Generalized inverse limit は正確には [3] で定義されたものだが，実は [5] で Mahavier が coordinate space が閉区間の場合について同様の概念を扱っている．

定義 2.4. ([3]) X, Y を continuum とし，$f : X \to 2^Y$ を upper semi-continuous function とする．このとき，$X \times Y$ の部分空間 $G(f)$ を，$G(f) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in f(x)\}$ と定める．

次の定義は通常の連続写像に関する indecomposable map の定義を一般化したものである．

定義 2.5. X, Y を continuum とし，$f : X \to 2^Y$ を upper semi-continuous function とする．このとき，$f : X \to 2^Y$ が *indecomposable map* であるとは，$G(f)$ の subcontinuum A, B が $G(f) = A \cup B$ を満たすならば，$\mathrm{pr}_Y(A) = Y$ または $\mathrm{pr}_Y(B) = Y$ となるときにいう．

定義 2.6. ([4, Definition 9]) 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して，X_i を continuum とし，$f_i : X_{i+1} \to 2^{X_i}$ を upper semi-continuous function とする．このとき，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\Pi_{i=1}^{n} X_i$ の部分空間 $G'[1, n]$ を，$G'[1, n] = \{(x_i)_{i=1}^{n} \in \Pi_{i=1}^{n} X_i \mid \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\text{-}1\}, x_i \in f_i(x_{i+1})\}$ と定める．

定理 2.7. ([1, Theorem 1.8]) $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ を任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して $X_i \supset X_{i+1}$ を満たす continuum の列とし，$X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$ とする．このとき，X は continuum である．

次の補題は，定理 2.7 を用いて容易に示される．

補題 2.8. 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して, X_i を continuum, $f_i : X_{i+1} \to 2^{X_i}$ を upper semi-continuous function とする. このとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $G'[1,n]$ が continuum ならば, $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ は continuum である.

最後に, よく知られている Cantor set の特徴付けに触れておく.

定理 2.9. ([1, Theorem 7.14]) X が Cantor set と同相であることと, 次の (i), (ii), (iii) をすべて満たすことは同値である:
(i) X はコンパクトである.
(ii) X は perfect である.
(iii) X は totally disconnected である.

3 定理 1.2 の証明の概略

この章では, 定理 1.2 の証明の概略を紹介する. 証明には, [4] のアイディアと結果を用いるので, まずそれらに関して紹介する.

定義 3.1. X を continuum とし, $A, B \subset X$ とする. このとき, X は A と B に関して *irreducible* であるとは, X の subcontinuum K が $A \cap K \neq \emptyset, B \cap K \neq \emptyset$ を満たすならば, $K = X$ であるときにいう.

定義 3.2. ([4, Definition 11]) 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して, X_i を continuum とし, $f_i : X_{i+1} \to 2^{X_i}$ を upper semi-continuous function とする. このとき, $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ は *full projection property* をもつとは, $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ の subcontinuum K が $|\{i \in \mathbb{N} \mid \pi_i(K) = X_i\}| = \infty$ を満たすならば, $K = \varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ であるときにいう.

定理 3.3. ([4, Theorem 22]) $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ を continuum の列とし, 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して, $f_i : X_{i+1} \to 2^{X_i}$ を upper semi-continuous function とする. また, $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ が continuum であるとする. このとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $G'[1,n]$ は $\{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in G'[1,n] \mid x_n = a\}$ と $\{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in G'[1,n] \mid x_n = b\}$ で irreducible となるような a, $b \in X_n$ が存在するならば, $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ は full projection property を持つ.

定理 3.4. ([4, Corollary 23]) $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ を continuum の列とし, 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して, $f_i : X_{i+1} \to 2^{X_i}$ を indecomposable map とする. このとき, $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ が full projection property を持ち, $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ が連結ならば, $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ は indecomposable continuum となる.

最後に, 定理 1.2 の証明の概略を紹介する.

証明の概略 $X_1 = X$ とし, $i \geq 2$ に対して, $X_i = [0,1]$ とする. X_1 は可分なので, X_1 の稠密な点列 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ が存在する. 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して, K_i を a_i, a_{i+1} を含む包含関係に関して極小な X_1 の subcontinuum とする. このとき, $g_i^{-1}(1/i) = \{a_i\}$,

$g_i^{-1}(1/(i+1)) = \{a_{i+1}\}$ となる連続写像 $g_i : K_i \to [1/(i+1), 1/i]$ が存在する. $f_1 :$ $X_2 \to 2^{X_1}$ を

$$f_1(x) = \begin{cases} g_i^{-1}(x) & (1/(i+1) \le x \le 1/i), \\ X_1 & (x = 0) \end{cases}$$

と定める. また $i \ge 2$ に対して, $f_i : X_{i+1} \to 2^{X_i}$ を

$$f_i(x_{i+1}) = \begin{cases} \{2x_{i+1}\} & (0 \le x_{i+1} \le 1/2), \\ \{2 - 2x_{i+1}\} & (1/2 \le x_{i+1} \le 1) \end{cases}$$

とする. このとき, 数学的帰納法を用いて, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $G'[1,n]$ が continuum となることと, $G'[1,n]$ は $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G'[1,n] \mid x_n = 0\}$ と $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G'[1,n] \mid x_n = 1\}$ で irreducible であること, さらに f_n は indecomposable map であることが示される. よって, $G'[1,n]$ が continuum となることと, 補題2.8 より $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ は continuum となる. 従って, 定理 3.3 より, $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ は full projection property を持つことが分かる. ゆえに, 定理 3.4 より, $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ は indecomposable continuum となる. ここで, $r : \varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty} \to X_1 \times \{0\} \times \{0\} \times \cdots ; (x_i)_{i=1}^{\infty} \mapsto (x_1, 0, 0, \ldots)$ と定める. このとき, r は $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ から $X_1 \times \{0\} \times \{0\} \times \cdots$ への retraction である.

ここで, r の任意の逆像は, コンパクトであり, perfect であり, totally disconnected である. 従って, 定理2.9 より, r の任意の逆像は Cantor set と同相である. □

参考文献

[1] Sam B. Nadler, Jr., *Continuum Theory*, An Introduction, Marcel Dekker , Inc ., New York, N.Y., 1992.

[2] David P. Bellamy, *Mappings of indecomposable continua*, Proc. Amer. Math. Soc. 30 (1971) 179-180.

[3] W. T. Ingram, William S. Mahavier, *Inverse limits of upper semi-continuous set valued functions*, Houston J. Math. 32 (2006), no. 1, 119-130.

[4] James P. Kelly, Jonathan Meddaugh, *Indecomposability in inverse limits with set-valued functions*, Topology Appl. 160 (2013), no. 13, 1720-1731.

[5] William S. Mahavier, *Inverse limits with subsets of [0,1]* × *[0,1]*, Topology Appl. 141 (2004), no. 1-3, 225-231.

[6] Michael Smith, *Generating large indecomposable continua*, Pacific J. Math. 62 (1976), no.2, 587-593.